

האוניברסיטה העברית בירושלים  
החוג למתימטיקה

בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)  
סמסטר הסתיו – תשנ"ג – מועד א'

הזמן: שתיים

המורה: פרופ' עזריאל לוי

ענה על 3 שאלות בלבד מתוך 4 השאלות הבאות  
תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות.

1. א. נתונה אלגברת היצירה של הביטויים הכוללת הפעלה של אופרטור  $n$ -מקומי  $F$  על ביטויים  $\phi_1, \dots, \phi_n$  בשלוש הדרכים  $F\phi_1 \dots \phi_n$  (כאשר  $\phi_1$  אינו מתחיל בסוגר שמאלי),  $F(\phi_1, \dots, \phi_n)$  ו-  $F(\phi_1)\phi_2$  (עבור  $n = 2$ ). הוכח שאלגברה זאת היא אלגברת יצירה יחידה. בהוכחה התייחס באופן מלא רק למקרים הראשון והשלישי, ולמקרה השני מספיק להתייחס ברמז.  
ב. נסח במפורש מסקנה של משפט זה בלוגיקה והסבר את חשיבותה.
2. א. הגדר את ההצבה של הפסוקים  $\psi_1, \dots, \psi_n$  עבור הפסוקים היסודיים  $P_1, \dots, P_n$  בפסוק  $\phi$  של תחשיב הפסוקים.  
ב. נסח והוכח את המשפט על הקשר בין ערכי האמת של  $\phi$  והפסוק המתקבל ממנו לאחר ההצבה, עבור המקרה  $n = 1$ .
3. א. הגדר את מושג האיזומורפיזם של מבנים.  
ב. נסח את המשפט המקשר את ערכי האמת של נוסחה  $\phi$  בשני מבנים איזומורפיים.  
ג. הוכח את המשפט לכל הנוסחאות  $\phi$  מסדר ראשון.
4. א. כתוב באופן מלא את הגדרת האמת לשפה המלאה מסדר שני, כולל משתני יחס ופעולה  $n$ -מקומיים.  
ב. כתוב פסוק מסדר שני שאינו שקול לוגית לאף פסוק מסדר ראשון והסבר מדוע הוא בעל תכונה זאת.

בהצלחה!

האוניברסיטה העברית בירושלים  
החוג למתימטיקה

בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)  
סמסטר הסתיו – תשנ"ב – מועד ב'

הזמן: שעתיים

המורה: פרופ' עזריאל לוי

ענה על 3 שאלות בלבד מתוך 4 השאלות הבאות  
תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות.

1. א. כתוב את עץ השקר של הפסוק  $(P \vee Q \rightarrow (R \leftrightarrow P)) \vee P$ .  
ב. האם פסוק זה אמיתי לוגית?

אם התשובה היא חיובית אמור מדוע הגעת למסקנה זאת, ואם התשובה היא שלילית כתוב את לוח האמת של הפסוק.  
בכל מקרה הסתמך בתשובתך רק על עץ השקר שכתבת, וצטט באופן מלא את המשפטים שבעזרתם הגעת למסקנה  
שהפסוק הוא אמיתי לוגית או ללוח האמת המסויים שכתבת.

2. א. כתוב את שני הנוסחים של משפט הקומפקטיות והוכח את שקילותם.  
ב. סקור את הצעדים העיקריים בהוכחת משפט הקומפקטיות של תחשיב הפסוקים בשפה בת מניה, כולל את בנית  
המודל. רמת הפירוט צריכה להיות כזאת שתלמיד שלמד את הקורס אבל לא את הוכחת משפט זה יוכל לשחזר את  
ההוכחה מן הסקירה.

3. א. רשום את אקסיומות פיאנו לתורת המספרים הטבעיים עם קבוע  $0$  ופעולת העוקב בלבד.  
ב. הגדר מה זאת קבוצת אקסיומות קטגורית.  
ג. הוכח את קטגוריות אקסיומות פיאנו.

4. א. הגדר את המושג של כריעות חיובית.  
ב. הוכח שקבוצת הפסוקים האמיתיים לוגית מסדר שני אינה כריעה חיובית.  
ג. תהי  $\Gamma$  קבוצת פסוקים כריעה בשפה מסדר ראשון. האם קבוצת המסקנות הלוגיות של  $\Gamma$  היא בהכרח כריעה?  
כריעה חיובית? הוכח.

בהצלחה!

האוניברסיטה העברית בירושלים  
החוג למתימטיקה

בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)  
סמסטר הסתיו – תשנ"ב – מועד ג'

הזמן: שעתיים

המורה: פרופ' עזריאל לוי

ענה על 3 שאלות בלבד מתוך 4 השאלות הבאות  
תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות.

1. א. הגדר את מושג הטווח  $\psi$  של אופרטור בביטוי נוצר  $\phi$  באלגברת היצירה של הביטויים.  
ב. הוכח שתמיד קיים  $\psi$  אחד ורק אחד המקיים את תנאי ההגדרה.
2. נסח והוכח את משפט השלמות מבחינת לוחות האמת של תחשיב הפסוקים.
3. א. הגדר את מושג הטאוטולוגיה בתחשיב היחסים, כאשר מושג הטאוטולוגיה בתחשיב הפסוקים כבר ידוע.  
ב. הוכח שכל טאוטולוגיה של תחשיב היחסים היא נוסחה אמיתית לוגית.  
ג. תן הוכחה מלאה של המשפט הסימנטי בו אתה משתמש בהוכחה זאת.
4. א. כתוב מערכת אקסיומות קטגורית לשדה  $Z_2$  בן שני האיברים.  
ב. הוכח את הקטגוריות של מערכת האקסיומות שכתבת. הקפד על כל הפרטים הפורמליים של ההוכחה.

בהצלחה!